Über die Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex.[1])

Von JULIUS V. SZ. NAGY in Szeged.

1. Unter einer Fläche verstehen wir hier eine aus Elementarflächen bestehende Fläche. Eine Elementarfläche ist eine stetige, geschlossene Fläche, die in jedem Punkte eine mit dem Punkte sich stetig ändernde Berührungsebene hat und für die jede ebene Schnittkurve, sowie jede ebene Schnittkurve eines jeden ihrer Berührungskegel aus Elementarkurven besteht. Eine Elementarkurve ist im Sinne von C. JUEL ein reelles eindeutiges Kreisbild in der projektiven Ebene, welches überall eine Tangente besitzt und aus endlichvielen Konvexbogen besteht[2]). Durch Erweiterung dieser Definition lassen wir den Elementarkurven ganze Geraden und auch isolierte Doppelpunkte zu.

Ein kleinster geschlossener Teil einer Fläche, der selbst eine Fläche im definierten Sinn ist, ist eine Schale oder ein Mantel der Fläche. Wir nehmen an, daß die Fläche keine Ebene- oder Punktschale besitzt.

Die Ordnung einer Fläche ist die höchste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in denen die Fläche von einer beliebigen, nicht ganz in der Fläche enthaltenen Geraden getroffen wird. Der Index der Fläche ist die geringste Anzahl (einfacher) reeller Punkte, in

---

[1]) Diese Arbeit ist ein wenig veränderter kleiner Teil aus einer der Ungarischen Akademie der Wissenschaften am 12. Nov. 1934 vorgelegten Arbeit: Maximális indexű felületekre vonatkozó vizsgálatok, *Mat. és Természettudományi Értesitő,* **53** (1935), S. 420—474.

[2]) C. JUEL, Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter,* (7), *Naturv. og Math. Afd.,* **11** (1914), Nr. 2, S. 113—136; Über Elementarflächen, *Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung,* **22** (1913), S. 345—349; Über Flächen von Maximalindex, *D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Math.-fys. Meddelelser,* **6** (1924), Nr. 5, S. 1—40.

denen die Fläche von einer beliebigen Geraden getroffen werden kann. Eine Fläche n-ter Ordnung ist vom Maximalindex, wenn sie den Index $n-2$ hat.

Wir verstehen unter einem Ovaloid eine Fläche zweiter Ordnung, die sich ins Endliche projizieren läßt. Für Ovaloidschalen der Flächen vom Maximalindex haben wir die folgenden Sätze bewiesen[3]:

Eine Fläche vom Maximalindex kann höchstens ein Ovaloid haben. Die Ovaloidschale einer Fläche vom Maximalindex wird von keiner anderen Schale der Fläche geschnitten oder berührt.

Ist eine Schale einer Fläche vom Maximalindex eine Kegelfläche, so sind auch ihre übrigen Schalen — mit Ausnahme höchstens eines Ovaloides — Kegelflächen mit derselben Spitze.

2. Zur Ergänzung dieser Sätze beweisen wir erst den folgenden Satz:

I. *Hat eine Fläche vom Maximalindex eine Ovaloidschale, so kann sie keine Regelflächenschale haben.*

Ist nämlich S_o bzw. S_r eine Ovaloid- bzw. Regelflächenschale einer Fläche F vom Maximalindex, so wird S_o von keiner Geraden der Schale S_r getroffen. Man kann also durch eine gewöhnliche Erzeugende von S_r eine Ebene σ führen, von der das Ovaloid S_o berührt wird. Die Ebene σ berührt aber auch die Schale S_r, weil sie durch eine Erzeugende von S_r hindurchgeht. Bedeutet P_o bzw. P_r den Berührungspunkt der Tangentialebene σ mit der Schale S_o bzw. S_r, so liegt die Gerade P_oP_r ganz auf der Fläche F, weil eine Fläche vom Maximalindex keine Doppeltangente haben kann[4]. Der Punkt P_o ist also ein gemeinsamer Punkt des Ovaloides S_o mit der Schale S_r.

Aus diesem Widerspruch folgt also der Satz I.

3. Wir beweisen auch den folgenden Satz:

II. *Die Ordnung und der Index einer Fläche vom Maximalindex, die ein Ovaloid und außerdem auch andere Schalen hat, bleibt unverändert, wenn man das Ovaloid ausläßt oder es durch*

---

[3]) Julius v. Sz. Nagy, Über Flächen vom Maximalindex, *Math Annalen*, **98** (1927), S. 657—683, insb. S. 660—663. Diese Arbeit wird im Folgenden unter N angeführt.

[4]) N, S. 658; vgl. auch Hans Mohrmann, Über algebraische und nicht algebraische gewundene Kurven vom Maximalindex, *Math. Annalen*, **78** (1918), S. 171—176, insb. S. 172.

ein anderes Ovaloid ersetzt, das im Innern des ersten Ovaloides liegt.

Das Innere eines Ovaloides bedeutet die Menge der Punkte, von denen keine Tangente des Ovaloides ausgeht.

Zum Beweis dieses Satzes müssen wir nur zeigen, daß die Schnittkurve K der Fläche F vom Maximalindex mit einer beliebigen Ebene σ, von der die Ovaloidschale S_0 geschnitten wird, ihre Ordnung und ihren Index behält, wenn man das auf S_0 liegende Oval M_0 der Kurve K ausläßt oder durch ein im Innern von M_0 liegendes Oval ersetzt.

Das Oval M_0 hat keinen gemeinsamen Punkt mit einem anderen Zuge von K. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich das Ovaloid S_0 mit einer anderen Schale der Fläche F gemeinsame Punkte.

Die polare Figur der Kurve K in bezug auf einen in der Ebene liegenden Kreis ist eine Kurve K' vom Maximalklassenindex. Die Anzahlen der Tangenten, die aus zwei beliebigen Punkten der Ebene σ an die Kurve K' gehen, weichen nämlich voneinander um höchstens 2 ab. Die polare Figur des Ovales M_0 ist ein Oval M_0', das keine gemeinsame Tangente mit den übrigen Zügen von K' hat.

Auf Grund dieser Eigenschaft von M_0' werden wir zeigen, daß die übrigen Züge von K' alle im Innern von M_0' liegen. Für den Beweis benützen wir den folgenden Satz[5]):

Die Züge M_0' und M' einer ebenen Kurve vom Maximalklassenindex haben $m_0 m$ gemeinsame Tangenten, wenn m bzw. m_0 die Anzahl der Tangenten bedeuten, die aus einem Punkte von M_0' bzw. M' an den anderen Zug gehen.

Bedeutet M_0' bzw. M' das Oval bzw. einen beliebigen Zug von K', so ist $m_0 m = 0$, weil diese Züge keine gemeinsame Tangente haben. Ist nun die Klasse des Zuges M' mindestens drei, so ist $m \neq 0$ und deshalb $m_0 = 0$. Der Zug M' liegt also innerhalb des Ovales M_0'. Ist auch der Zug M' ein Oval, so liegt das eine Oval von M_0' und M' innerhalb des anderen, weil entweder $m_0 = 0$, oder $m = 0$ ist. Die Kurve K' kann also außerhalb des Inneren von M_0' nur Ovalzüge haben, von denen das Oval M_0'

---

[5]) Julius v. Sz. Nagy, Über die Züge der ebenen Kurven von Maximal-Klassenindex, *Math. Annalen*, **100** (1928), S. 179—187, insb. S. 186.

umgegeben ist. Hat die Kurve K' mehrere solche Ovale M', so gibt es unter diesen auch ein solches Oval $\bar{M}'$, so daß das von M_0' und $\bar{M}'$ begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet keinen Zug von K' enthält. Aus den Punkten dieses Gebietes läßt sich die konvexe bzw. die konkave Seite des Ovales M_0' bzw. $\bar{M}'$ erreichen. Dies ist aber unmöglich, weil K' eine Kurve vom Maximalklassenindex ist[6]).

Daraus folgt, daß das Innere des Ovales M_0' jeden anderen Zug von K enthält.

Das Oval M_0' und damit auch die ganze Kurve K' läßt sich ins Endliche projizieren. Daraus folgt, daß die Kurve K' keine Wendetangente hat, weil eine Kurve vom Maximalklassenindex höchstens eine Wendetangente haben kann und eine Kurve mit einer einzigen Wendetangente unpaar ist, die sich ins Endliche nicht projizieren läßt.

Die Kurve K' teilt die Ebene σ in gewisse Gebiete G_0, G_1,... Gehören die an der konkaven Seite des Ovales M_0' liegenden Punkte der Ebene zum Gebiete G_0 und bedeutet n die Klasse der Kurve K', so gehen $n-2$ Tangenten aus jedem Punkte von G_0 an die Kurve K'. Aus den Punkten der zu G_0 benachbarten Gebiete gehen n Tangenten an K'. In diese Gebiete gelangt nämlich ein Punkt aus G_0 ausgehend so, daß er einen konvexen Bogen von K' von der konkaven Seite nach der konvexen Seite übertritt.

Die Klasse und der Klassenindex der Kurve K' bleibt offenbar unverändert, wenn man das Oval M_0' durch ein größeres Oval ersetzt, von dem M_0' ungegeben ist, oder das Oval M_0' einfach ausläßt. Durch dieses Verfahren wird das Gebiet G_0 durch ein solches Gebiet der Ebene vergrößert, aus dessen Punkten an die Kurve K' n Tangenten gezogen werden können.

Nimmt man die polare Figur der Kurve K' in bezug auf den angenommenen Kreis, so folgt, daß die Kurve K n-ter Ordnung und vom Maximalindex ihre Ordnung und ihren Index behält, wenn mas das Oval ausläßt oder durch ein im Innern von M_0 liegendes anderes Oval ersetzt.

Damit ist auch der Satz II bewiesen.

4. Aus dem Beweise des Satzes II folgt auch der folgende Satz:

---

[6]) Julius v. Sz. Nagy, Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex, *Math. Annalen*, **89** (1923), S. 32—75, insb. S. 49—50.

III. *Hat eine Fläche vom Maximalindex ein Ovaloid, so werden ihre Schalen von jeder das Ovaloid schneidenden Ebene in Kurven von gerader Klasse geschnitten.*

Im entgegengesetzten Falle gäbe es eine Ebene σ, von der das Ovaloid S_0 bzw. die Schale S der Fläche F vom Maximalindex in einem Oval M_0 bzw. in einer Kurve M mit einer Spitze geschnitten würde. Die duale Figur der Schnittkurve der Fläche F mit der Ebene σ hätte also eine Wendetangente. Dies ist aber nach den Vorigen unmöglich.

5. Nachtrag während der Korrektur (am 3. Oktober 1935).

IV. *Eine Ovaloidschale einer Fläche vom Maximalindex kann von keiner Tangentialebene der Fläche geschnitten werden.*

Im Innern der Ovaloidschale S_0 kann die Fläche F keinen Punkt haben. Im entgegengesetzten Falle hätte nämlich S_0 mit einer anderen Schale S_1 von F gemeinsame Punkte und deshalb auch gemeinsame Geraden.

Für den Beweis des Satzes IV nehmen wir an, daß S_0 von einer Tangentialebene der Schale S_1 im Oval M_0 geschnitten wird. Der Berührungspunkt P dieser Tangentialebene von S_1 liegt außerhalb von S_0 und deshalb auch außerhalb von M_0. Das Oval M_0 hat also zwei durch P hindurchgehende Tangenten t_1 und t_2. Diese Tangenten berühren die Fläche F auch im Punkte P. Dies ist aber unmöglich, weil eine Fläche vom Maximalindex keine Doppeltangente haben kann und weil t_1 und t_2 der Fläche F nicht zugehören können. Wären nämlich diese Geraden auf F gelegen, so hätte das Ovaloid S_0 mit einer anderen Schale von F gemeinsame Punkte und Geraden.

Daraus folgt der Satz IV.

Durch eine Gerade, von der S_0 geschnitten wird, gehen also keine Tangentialebenen an die Fläche F. Der Klassenindex von F ist also Null. Daraus folgt der Satz:

V. *Die Klasse bzw. der Klassenindex einer Fläche vom Maximalindex, die auch eine Ovaloidschale besitzt, ist eine gerade Zahl bzw. Null.*

Die Sätze I—III lassen sich aus dem Satze IV unschwer gefolgert werden.

(Eingegangen am 23. April 1935.)